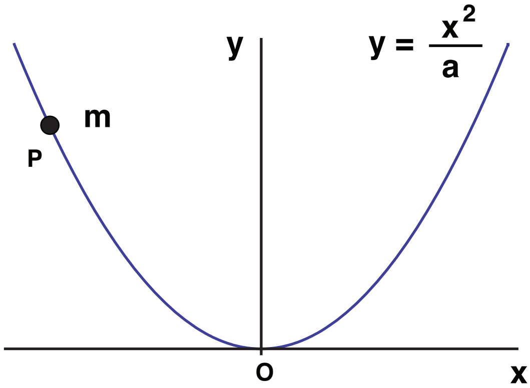
1. Un punto P di massa m si muove lungo una guida parabolica di equazione $y = x^2/a$ sul piano verticale $O(x, y)$, con velocità costante u lungo x, $\dot{x} = u$. Esprimere il modulo della velocità in funzione di x e calcolare tale velocità quando P passa per l'origine.



Soluzione.

Equazione della traiettoria: $\quad y = \dfrac{x^2}{a}$

Vettore velocità: $\quad \mathbf{v} = \dot{x}\,\widehat{\mathbf{i}} + \dot{y}\,\widehat{\mathbf{j}}$

Ma $\quad \dot{x} = u \quad$ e $\quad \dot{y} = \dfrac{2\,x}{a}\,\dot{x} = \dfrac{2\,x}{a}\,u$

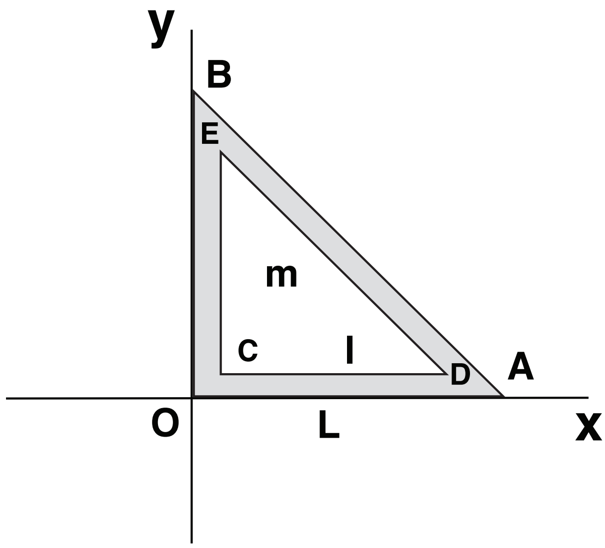
Modulo al quadrato della velocità: $\quad v^2 = |\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2 \left(1 + \dfrac{4\,x^2}{a^2}\right)$

Nell'origine $x = 0$ e quindi: $\quad v(O) = u$

2. Una cornice triangolare di massa m è costituita da un triangolo rettangolo isoscele OAB di cateto L privato di un triangolo rettangolo isoscele CDE di cateto $l < L$, con i lati paralleli al triangolo esterno e con i cateti CE e CD situati a distanza $(L - l)/2$ dai cateti OB e OA. Determinare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z perpendicolare al piano della figura) e determinare le direzioni principali d'inerzia con origine in O.

Soluzione. La matrice d'inerzia si ottiene per differenza tra la matrice del triangolo pieno ed quella del buco triangolare:

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_L - \mathbb{I}_l$$



con masse m_L ed m_l date da

$$\begin{aligned}
&m_L - m_l = m \\
&\frac{m_L}{m_l} = \frac{L^2}{l^2} \\
&m_L = \frac{m\,L^2}{L^2 - l^2} \\
&m_l = \frac{m\,l^2}{L^2 - l^2}
\end{aligned}$$

Triangolo di cateto L:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \sigma \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy\, y^2 = \sigma \int_0^L dx\, \frac{(L-x)^3}{3} \\
&= \sigma \int_0^L dx\, \frac{x^3}{3} = \sigma\, \frac{L^4}{12} = \frac{1}{6}\, m_L\, L^2 \\
I_{22} &= I_{11} = \frac{1}{6}\, m_L\, L^2 \qquad \text{(per simmetria)} \\
I_{12} &= \sigma \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy\, (-x\,y) = -\sigma \int_0^L x\, dx \int_0^{L-x} y\, dy \\
&= -\sigma \int_0^L dx\, x\, \frac{(L-x)^2}{2} = -\sigma \int_0^L dx\, (L-x)\, \frac{x^2}{2} \\
&= -\frac{\sigma}{2} \int_0^L dx\, (L\,x^2 - x^3) = -\frac{\sigma}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) L^4 = -\frac{1}{12}\, m_L\, L^2
\end{aligned}$$

Triangolo di cateto l rispetto ad un sistema con gli assi lungo i lati (per analogia con il caso precedente):

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{6}\, m_l\, l^2 \\
I_{22} &= I_{11} = \frac{1}{6}\, m_l\, l^2 \\
I_{12} &= -\frac{1}{12}\, m_l\, l^2
\end{aligned}$$

Dobbiamo ora spostare gli elementi della matrice con il teorema di Huygens. Calcoliamo pertanto il centro di massa P_0 del triangolo CDE nel sistema con gli assi lungo i lati.

$$\begin{aligned}
&x_0 = \frac{\sigma}{m_l} \int_0^l dx \int_0^{l-x} dy\, x = \frac{2}{l^2} \int_0^l dx\, x\,(l-x) = \frac{2}{l^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) l^3 = \frac{1}{3}\, l \\
&y_0 = \frac{1}{3}\, l \qquad \text{(per simmetria)}
\end{aligned}$$

Quindi, nel sistema di riferimento della figura:

$$\begin{aligned}
&I_{11} = \frac{1}{6}\, m_l\, l^2 - m_l\, \frac{l^2}{9} + m_l \left(\frac{l}{3} + \frac{L-l}{2}\right)^2 = \frac{1}{18}\, m_l\, l^2 + m_l \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 \\
&I_{22} = I_{11} \\
&I_{12} = -\frac{1}{12}\, m_l\, l^2 + m_l\, \frac{l^2}{9} - m_l \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}\, m_l\, l^2 - m_l \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

Sottraendo otteniamo i valori per la figura:

$$\begin{aligned}
&I_{11} = \frac{1}{6}\, m_L\, L^2 - \frac{1}{18}\, m_l\, l^2 - m_l \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 \\
&I_{22} = I_{11} \\
&I_{12} = -\frac{1}{12}\, m_L\, L^2 - \frac{1}{36} m_l\, l^2 + m_l \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 \\
&I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2\, I_{11}
\end{aligned}$$

3. Un sistema materiale, che si muove nel un piano verticale $O(x, y)$, è costituito da un punto P di massa m, libero di scorrere senza attrito su una guida rettilinea r priva di massa e passante per l'origine, a sua volta libera di ruotare attorno all'origine stessa. Un disco di raggio R, centro C e massa M è saldato sulla guida, con il centro C a distanza L dall'origine. Una molla di costante $k > 0$ collega il punto P con l'origine O lungo la guida.

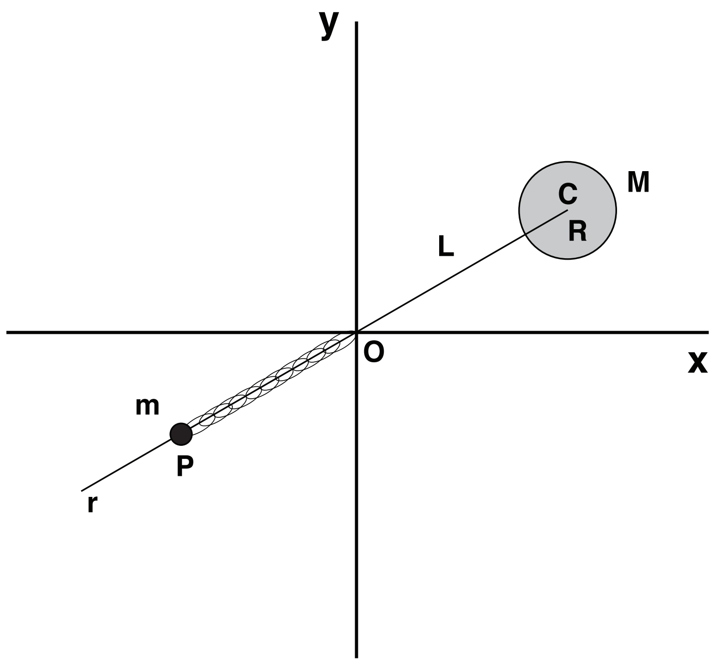
   Dopo aver individuato il numero di gradi di libertà ed introdotto le coordinate lagrangiane, calcolare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità. Dopo aver risolto il problema per valori generici dei parametri, si consideri il caso $m = 4M$ e $kL = 2Mg$.

Soluzione. I gradi di libertà sono due; siano s e φ le coordinate lagrangiane, con s la distanza di P da O (positiva quando P sta dalla parte opposta del cerchio) e φ l'angolo che la guida forma con l'asse x. L'energia potenziale è data da

$$V(s, \varphi) = (MgL - mgs)\, \sin\varphi + \frac{1}{2}\, k\, s^2$$

Calcoliamone le derivate:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial s} = ks - mg\, \sin\varphi \\
&\frac{\partial V}{\partial \varphi} = (MgL - mgs)\, \cos\varphi \\
&\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \varphi} = -mg\, \cos\varphi \\
&\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = (mgs - MgL)\, \sin\varphi
\end{aligned}$$



Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} &ks - mg \sin\varphi = 0 \\ &(MgL - mgs)\cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione, o è 1) $\cos\varphi = 0$ o è 2) $MgL - mgs = 0$.

$$1) \quad \cos\varphi = 0, \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow ks - mg = 0, \qquad s = \frac{mg}{k}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow ks + mg = 0, \qquad s = -\frac{mg}{k}$$

$$\Gamma_1 = \left(\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Gamma_2 = \left(-\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2) \quad MgL - mgs = 0 \rightarrow s = \frac{ML}{m}$$

$$\sin\varphi = k\,\frac{ML}{m^2 g} \Rightarrow \varphi = \varphi_0, \pi - \varphi_0$$

$$\text{con} \qquad \varphi_0 = \sin^{-1}\frac{MkL}{m^2 g}.$$

$$\Gamma_3 = \left(\frac{ML}{m}, \varphi_0\right) \qquad \Gamma_4 = \left(\frac{ML}{m}, \pi - \varphi_0\right)$$

Γ_3 e Γ_4 esistono a condizione che $MkL/(m^2 g) < 1$.

Studio della stabilità. Matrice hessiana:

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} k & -mg\cos\varphi \\ -mg\cos\varphi & (mgs - MgL)\sin\varphi \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_1) &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} - MgL \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_2) &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} + MgL \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_3) &= \begin{pmatrix} k & -mg\cos\varphi_0 \\ -mg\cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_4) &= \begin{pmatrix} k & mg\cos\varphi_0 \\ mg\cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calcolando i determinanti, si vede che:

- Γ_1 è stabile se $m^2g^2 > MgkL$;
- Γ_2 è sempre stabile;
- Γ_3 e Γ_4 sono sempre instabili.

Se $m = 4\,M$ e $k\,L = 2\,M\,g$, allora $m^2g^2 = 16\,M^2g^2$ e $M\,g\,k\,L = 4\,M^2g^2$, quindi Γ_1 è stabile; inoltre $MkL/(m^2g) = 1/8 < 1$ e Γ_3 e Γ_4 esistono.

4. Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema dell'esercizio precedente.

Soluzione. Energia cinetica: $T = T_P + T_{disco}$.

$$
\begin{aligned}
P - O &= s\,(-\widehat{\mathbf{i}}\cos\varphi - \widehat{\mathbf{j}}\sin\varphi) \\
\mathbf{v}_P &= \dot{s}\,(-\widehat{\mathbf{i}}\cos\varphi - \widehat{\mathbf{j}}\sin\varphi) + s\,\dot{\varphi}\,(\widehat{\mathbf{i}}\sin\varphi - \widehat{\mathbf{j}}\cos\varphi) \\
T_P &= \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}_P^2 = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C - O &= L\,(\widehat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\sin\varphi) \\
\mathbf{v}_C &= L\,\dot{\varphi}\,(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\cos\varphi) \\
T_{disco} &= \frac{1}{2}\,M\,\mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2}\,I\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\,M\,L^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M\,R^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}\,M\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2 \\
T &= \frac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left[m\,s^2 + M\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right)\right]\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

Lagrangiana:

$$
\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left[m\,s^2 + M\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right)\right]\dot{\varphi}^2 - \left\{(MgL - mgs)\sin\varphi + \frac{1}{2}\,k\,s^2\right\}
$$

Derivate della Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= m\,\dot{s}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= m\,s\,\dot{\varphi}^2 + m\,g\,\sin\varphi - k\,s\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \left[m\,s^2 + M\,\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right)\right]\,\dot{\varphi}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= (mgs - MgL)\,\cos\varphi
\end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned}
& m\,\ddot{s} = m\,s\,\dot{\varphi}^2 + m\,g\,\sin\varphi - k\,s\\
& 2\,m\,s\,\dot{s}\,\dot{\varphi} + \left[m\,s^2 + M\,\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right)\right]\,\ddot{\varphi} = (mgs - MgL)\,\cos\varphi
\end{aligned}$$